Fachbereich Mathematik Wintersemester 2008/09, Blatt 4
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 10/11/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13: Wir betrachten die Gruppe $U = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ aus Aufgabe 9, wobei die Gruppenoperation die Verknüpfung von Abbildungen ist, sowie die Gruppe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Zeige, daß die Abbildung

$$\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : f_{a,b} \mapsto a$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Hinweis: in Aufgabe 9 wurde bereits gezeigt, was $f_{a,b} \circ f_{c,d}$ ist! Das dürft Ihr hier verwenden.

Aufgabe 14: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, $\mathrm{inv} : G \longrightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 15: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$. Zeige:

a. Die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow G : n \mapsto g^n$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Bild $\mathrm{Im}(\alpha) = \langle g \rangle$.

b. Gibt es ganze Zahlen $k \neq l$ mit $g^k = g^l$, so existiert die Zahl

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > 0, g^m = e_G\}$$

und es gelten:

(a) $\{m \in \mathbb{Z} \mid g^m = e\} = n\mathbb{Z}$,

(b) $\langle g \rangle = \{e_G, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$, und

(c) $|\langle g \rangle| = n$.

Hinweis: In Teil b. verwende man die Division mit Rest für ganze Zahlen, d.h. die Eigenschaft, daß es für zwei ganze Zahlen m und n eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r gibt mit $m = q \cdot n + r$ und $0 \leq r < |n|$. r heißt der Rest von m durch n bei Division mit Rest. Diese Art, ganze Zahlen zu teilen kennt Ihr schon aus der Grundschule.

Aufgabe 16: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $h, k \in G$ fest gegeben. Prüfe, welche Bedingungen für h und k gelten müssen, damit die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

a. $\alpha : G \to G : g \mapsto h \cdot g$,

b. $\beta : G \to G : g \mapsto h \cdot g \cdot k$,