Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2008/09, Blatt 5

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 17/11/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17: Da $(\mathbb{R},+)$ eine Gruppe ist, ist nach Aufgabe 4 auch $(\mathbb{R}^2,+)$ mit der komponentenweisen Addition eine Gruppe. Zeige, daß folgende Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 2x+3y$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Bestimme das Bild und den Kern von α. Ist α injektiv / surjektiv?

Aufgabe 18: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : (\mathbb{Z},+) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$.

Aufgabe 19: Es sei M eine Menge und $\sigma \in \mathrm{Sym}(M)$ eine bijektive Selbstabbildung von M. Wir definieren

$$m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; \sigma^k(m) = n$$

für $m,n \in M$. Beweise die folgenden Aussagen:

a. Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b. Es sei $m \in M$ so, daß die Äquivalenzklasse $\overline{m}$ von m die Mächtigkeit $n < \infty$ hat. Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Das Minimum $k = \min\{l > 0 \mid \sigma^l(m) = m\}$ existiert.

   (b) Für $q \in \mathbb{Z}$ gilt $\sigma^{q\cdot k}(m) = m$.

   (c) $\overline{m} = \big\{m, \sigma(m), \ldots, \sigma^{k-1}(m)\big\}$.

   (d) $k = n$.

c. Es sei $M = \{1,\ldots,7\}$ und $\sigma \in \mathrm{Sym}(M) = \mathbb{S}_7$ sei durch folgende Wertetabelle gegeben:

a	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(a)$	3	4	1	7	2	6	5

Was sind die Äquivalenzklassen bezüglich obiger Äquivalenzrelation?

Aufgabe 20: Es sei $\alpha : (G,\cdot) \longrightarrow (H,*)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Wir nennen die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g die *Ordnung* von g und bezeichnen sie mit $o(g) := |\langle g \rangle|$. Zeige:

a. Ist $o(g) < \infty$, so ist $o(g)$ ein Vielfaches von $o\big(\alpha(g)\big)$.

b. Ist α injektiv, so gilt $o(g) = o\big(\alpha(g)\big)$.

Hinweis, verwende Aufgabe 15. – Es ist ein wichtiges Prinzip, daß ein Monomorphismus alle guten Eigenschaften einer Gruppe bzw. ihrer Elemente erhält. Die Ordnung eines Elementes ist ein Beispiel für dieses Prinzip.