Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2008/09, Blatt 6

Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 24/11/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 21: (Die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$)

Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

a. Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist.

b. Die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) bezeichnen wir mit $(v_1 : v_2)$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = M/\sim$. Wir definieren dann auf dieser Menge $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ eine zweistellige Operation durch

$$(v_1 : v_2) \cdot (w_1 : w_2) := (v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 : v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1).$$

Zeige, daß diese Operation wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und daß $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.

c. Ist $(G, \cdot)$ die Gruppe aus Aufgabe 5 b., so zeige man, daß die Abbildung

$$\alpha : G \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} : (a, b) \mapsto (a : b)$$

ein Gruppenepimorphismus mit Kern $\operatorname{Ker}(\alpha) = \{(a, 0) \mid 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$ ist.

Hinweis: wenn man in Teil b. die Ergebnisse aus dem Beweis von Aufgabe 5 b. verwendet, braucht man keines der Gruppenaxiome explizit nachzuprüfen!

Aufgabe 22: Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 8 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_8.$$

a. Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, π^{-1}.

b. Bestimme für jede der Permutationen in a. die Zyklenzerlegung.

Aufgabe 23: Finde zwei Untergruppen von $\mathbb{S}_4$, die beide die Mächtigkeit 4 besitzen, aber nicht isomorph zueinander sind. Begründe, weshalb es Untergruppen sind und weshalb sie nicht isomorph zueinander sind.

Hinweis, eine der Gruppen wird ein Element der Ordnung 4 besitzen, die andere nicht. Verwende dann Aufgabe 20, um zu zeigen, daß die Gruppen nicht isomorph sein können.

Aufgabe 24: Bestimme die Elemente der Untergruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4) \circ (2\ 3) \rangle \leq \mathbb{S}_5$ von $\mathbb{S}_5$.