

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 01/12/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenden zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Betrachte nochmals die Permutationen $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_8$ aus Aufgabe 22.

- Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.
- Schreibe π^{-1} als Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.
- Berechne für jede der Permutationen in Aufgabe 22 a. das Signum.

Aufgabe 26: (Die Produktformel)

Es seien $U, V \leq G$ Untergruppen der Gruppe (G, \cdot) .

- Zeige, daß durch

$$(u, v) \sim (u', v') \iff u \cdot v = u' \cdot v'$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $U \times V$ definiert wird.

- Zeige, daß die Äquivalenzklasse von $(u, v) \in U \times V$ die Gestalt

$$\overline{(u, v)} = \{(u \cdot y, y^{-1} \cdot v) \mid y \in U \cap V\}$$

besitzt und die Mächtigkeit $|U \cap V|$ hat.

- Beweise, wenn U und V endlich sind, so gilt die Produktformel

$$|U \cdot V| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|}.$$

Aufgabe 27: Es sei (G, \cdot) eine Gruppe und $U \leq G$. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $gug^{-1} \in U$ für alle $u \in U$ und alle $g \in G$.
- $gUg^{-1} = U$ für alle $g \in G$.
- $gU = Ug$ für alle $g \in G$.
- $(gU) \cdot (hU) = ghU$ für alle $g, h \in G$.

Hinweis: Um die Äquivalenz von mehreren Aussagen zu zeigen, kann man einen sogenannten Ringschluß machen. Es reicht zu zeigen: "a. \Rightarrow b. \Rightarrow c. \Rightarrow d. \Rightarrow a.", denn aus "a. \Rightarrow b." und "b. \Rightarrow c." folgt z.B. "a. \Rightarrow c.", d.h. die scheinbar noch fehlenden Implikationen ergeben sich von selbst.

Aufgabe 28: Bestimme alle Untergruppen der Gruppe $D_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4) \circ (1\ 5) \rangle$.