Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2008/09, Blatt 8

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 08/12/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29:

a. Zeige, daß die Untergruppe $U = \langle (1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle \leq \mathbb{S}_4$ die Ordnung $|U| = 12$ hat.

b. Zeige, daß jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

Hinweis: wenn man die Ergebnisse aus Kapitel 4 der Vorlesung verwendet, braucht man in Teil a. die Elemente von U nicht auszurechnen!

Aufgabe 30: Es sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index $|G : U| = 2$. Zeige, U ist ein Normalteiler von G.

Aufgabe 31: Bestimme alle Normalteiler der Gruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4) \circ (1\ 5) \rangle$.

Aufgabe 32:

a. Betrachte für $m, n, a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Element $(\overline{a}_m, \overline{b}_n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$. Zeige, daß sich die Ordnung dieses Elementes wie folgt berechnen läßt

$$o\Big((\overline{a}_m, \overline{b}_n)\Big) = \text{kgv}\Big(o(\overline{a}_m), o(\overline{b}_n)\Big) = \text{kgv}\left(\frac{\text{kgv}(a,m)}{a}, \frac{\text{kgv}(b,n)}{b}\right)$$

und daß sie ein Teiler von $\text{kgv}(m, n)$ ist. Insbesondere ist $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ nicht zyklisch, wenn m und n nicht teilerfremd sind.

b. Berechne die Ordnung von $(\overline{6}_{21}, \overline{9}_{33}) \in \mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{33}$.