Fachbereich Mathematik Wintersemester 2008/09, Blatt 11
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 12/01/2009, 12:00

Aufgabe Nummer 44 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 41: Es sei S ein kommutativer Ring mit Eins, $R \subseteq S$ ein Unterring und $b \in S$.

a. Wir definieren
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b^k \in S$$
für $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in R[t]$. Zeige, daß die Abbildung
$$\varphi_b : R[t] \longrightarrow S : f \mapsto f(b)$$
ein Ringhomomorphismus ist.

b. Zeige, wenn b Nullstelle des Polynoms $g = t^n + \alpha_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 \in R[t]$ ist, so ist
$$\mathrm{Im}(\varphi_b) = \left\{ a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot b^{n-1} \;\middle|\; a_0, \ldots, a_{n-1} \in R \right\}.$$
Wir bezeichnen diesen Unterring von S mit $R[b] = \mathrm{Im}(\varphi_b)$.

c. Gib mit Hilfe von Teil b. eine möglichst effiziente Darstellung für den Ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ an.

Hinweis, in Teil b. sollte man für die Inklusion von $\mathrm{Im}(\varphi_b)$ in der rechten Seite zunächst mit Induktion zeigen, daß b^k für alle $k \in \mathbb{N}$ in der rechten Seite enthalten ist, und dann, daß die rechte Seite abgeschlossen bezüglich endlicher R-Linearkombinationen ist.

Aufgabe 42: Zeige, daß
$$I = \{f \in \mathbb{Z}[t] \mid f(5) = 0\}$$
ein Ideal von $\mathbb{Z}[t]$ ist.

Aufgabe 43: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige, R ist genau dann ein Körper, wenn R genau zwei Ideale hat.

Hinweis, aus der letzten Proposition, die wir in der Vorlesung am Montag gezeigt haben, folgt, daß für $a \in R$ das Erzeugnis von a gerade die Menge $\langle a \rangle_R = \{x \cdot a \mid x \in R\}$ ist!

Aufgabe 44: Welcher der folgenden Ringe ist ein Körper?

a. $\mathbb{Z}_4$.

b. $\mathbb{Z}_7$.

Beweise Deine Vermutung.