Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2008/09, Blatt 12

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 19/01/2009, 12:00
Aufgabe Nummer 48 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 45:

a. Bestimme die Nullteiler und die Einheiten in $\mathbb{Z}_{24}$. Ist $\mathbb{Z}_{24}$ ein Integritätsbereich?

b. Ist $3+4i$ ein Teiler von $7+i$ in $\mathbb{Z}[i]$?

Aufgabe 46: Für ein eine positive ganze Zahl n definieren wir die Abbildung

$$\phi_n : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{Z}_n[t] : \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot t^k.$$

Zeige, daß ϕ_n ein Ringepimorphismus ist. Wir nennen ϕ_n *Reduktion modulo* n.

Aufgabe 47: Sei R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

a. Zeige, ist $g \in \text{ggT}(a, b)$, dann ist $\text{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

b. Zeige, ist $k \in \text{kgV}(a, b)$, dann ist $\text{kgV}(a, b) = \{u \cdot k \mid u \in R^*\}$, d.h. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

c. Bestimme alle größten gemeinsamen Teiler von $f = t^2 - 3t + 2$ und $g = t^3 - 2t^2 - t + 2$ in $\mathbb{Z}[t]$.

Aufgabe 48:

a. Bestimme $\mathbb{Z}_4^*$.

b. Bestimme $\mathbb{Z}_9^*$.

c. Bestimme $\mathbb{Z}_{10}^*$.

d. Stelle eine Vermutung auf, wann eine Element $\overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ für $n \geq 2$ eine Einheit ist.

e. Zeige, für alle $n \geq 2$ ist $\overline{n-1} \in \mathbb{Z}_n$ eine Einheit.