Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 26/01/2009, 12:00

Aufgabe Nummer 52 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49: Zeige, ist $p = x + y \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ so, daß $q := |p|^2 = x^2 + y^2$ eine Primzahl ist, dann ist p irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$. Finde zudem ein Beispiel für eine solche Zahl p.

Aufgabe 50:

a. Es sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ mit $\operatorname{lc}(f) = 1$. Zeige, falls es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\phi_p(f)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_p[t]$ ist, so ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$.

b. Bestimme alle Polynome f in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad 4, deren Leitkoeffizient $\operatorname{lc}(f)$ und deren konstanter Koeffizient $f(0)$ beide $\overline{1}$ sind. Welche dieser Polynome sind irreduzibel? Beweise Deine Aussage.

c. Ist $f = t^4 + 187t^3 + 5t^2 - 33t + 3001 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?

Hinweis, in Teil a. bezeichnet ϕ_p die Reduktion modulo p aus Aufgabe 46.

Aufgabe 51: Zeige, daß $\mathbb{Z}[i] = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion $\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : a \mapsto |a|^2$ ist.

Hinweis, wenn man a durch b mit Rest dividieren will, sollte man sich zunächst die komplexe Zahl $\frac{a}{b}$ anschauen und sich überlegen, wie weit sie von einer Zahl in $\mathbb{Z}[i]$ entfernt ist.

Aufgabe 52: Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Wir definieren zwei neue ganze Zahlen durch

$$\operatorname{kgv}(a,b) := \begin{cases} \min\{z > 0 \mid a \text{ und } b \text{ teilen } z\}, & \text{falls } a, b \neq 0, \\ 0, & \text{falls } a = 0 \text{ oder } b = 0, \end{cases}$$

und

$$\operatorname{ggt}(a,b) := \begin{cases} \max\left\{z > 0 \;\middle|\; z \text{ teilt sowohl } a \text{ als auch } b\right\}, & \text{falls } (a,b) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, $\operatorname{ggt}(a,b) \in \operatorname{ggT}(a,b)$ und $\operatorname{kgv}(a,b) \in \operatorname{kgV}(a,b)$.