Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2008/09, Blatt 14

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 02/02/2009, 12:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 53: Betrachte die Polynome

$$f = t^5 + 2t^4 + 5t^3 + 9t^2 + 16t + 15 \in \mathbb{Z}[t]$$

und

$$g = t^3 + 2t^2 + 3t \in \mathbb{Z}[t].$$

a. Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[t]$ mittels des euklidischen Algorithmus.

b. Betrachte wie in Aufgabe 46 die Reduktion von f und g modulo 5 und bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der resultierenden Polynome in $\mathbb{Z}_5[t]$.

Aufgabe 54:

a. Ist K ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Zeige, f ist genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle hat.

b. Ist $f = t^3 + \overline{2} \cdot t^2 + \overline{2} \cdot t + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[t]$ irreduzibel? Falls nicht, schreibe f als Produkt von irreduziblen Polynomen.

c. Ist $f = t^3 + \overline{2} \cdot t^2 + \overline{2} \cdot t + \overline{2} \in \mathbb{Z}_7[t]$ irreduzibel? Falls nicht, schreibe f als Produkt von irreduziblen Polynomen.

Aufgabe 55: Es sei K ein Körper und $0 \neq f \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $n = \deg(f)$. Zeige, f hat höchsten n Nullstellen.

Aufgabe 56: Zeige, $f = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ ist irreduzibel und $K = \mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ ist ein Körper mit 4 Elementen. Stelle die Additions- und Multiplikationstabelle für K auf. Ist K isomorph zum Ring $\mathbb{Z}_4$ oder zum Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$? Betrachten wir den Polynomring $K[x]$ über K in der Unbestimmten x. Ist das Polynom $g = x^2 + x + \overline{1} \in K[x]$ irreduzibel? Hat g eine Nullstelle in K?

Anmerkung, in dieser Aufgabe wollen wir die Elemente $\overline{0}$ und $\overline{1}$ in $\mathbb{Z}_2$ der Einfachheit halber mit 0 und 1 bezeichnen, wobei $1 + 1 = 0$ gilt. Das ist deshalb sinnvoll, weil auch die Elemente von $\mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ wieder Restklassen sind, und die doppelten Restklassen (z.B. $\overline{t + \overline{1}}$) für unnötige Verwirrung sorgen.