Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2009/10, Blatt 1
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Die Aufgaben des ersten Übungsblattes sind als Präsenzaufgaben für die Übungsstunden der ersten Woche gedacht.

Aufgabe 1: Es seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen. Wir definieren auf der Menge $G \times H = \{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$ eine zweistellige Operation durch

$$(x, y) \circ (x', y') := (x \cdot x', y * y')$$

für $(x, y), (x', y') \in G \times H$. Zeige, daß dann $(G \times H, \circ)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2: Untersuche, ob die folgende zweistellige Operation die Menge $G := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ zu einer Gruppe macht:

$$G \times G \longrightarrow G : \big((a, b), (a', b')\big) \mapsto (a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb').$$

Aufgabe 3: Wir definieren auf der Menge $G = \{0, 1\}$ eine zweistellige Operation, indem wir alle Produkte $a * b$ in einer Tabelle angeben, wobei in der ersten Spalte alle möglichen Werte von a und in der ersten Zeile alle möglichen Werte von b aufgeführt sind:

$a * b$	0	1
0	0	1
1	1	0

Zeige, daß $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 4: Sei M eine Menge. Für zwei Abbildungen $f : M \to M$ und $g : M \to M$ definieren wir die *Komposition* von f und g durch

$$f \circ g : M \to M : m \mapsto f\big(g(m)\big).$$

Wir nennen eine Abbildung $f : M \to M$ *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $f' : M \to M$ gibt, so daß

$$f \circ f' = f' \circ f = \mathrm{id}_M,$$

wobei $\mathrm{id}_M : M \to M : m \mapsto m$ die Identität auf M ist. Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Sym}(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, $\big(\mathrm{Sym}(M), \circ\big)$ ist eine Gruppe.