

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 02/11/2009, 10:00

Aufgabe Nummer 8 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 5: Untersuche, welche der folgenden zweistelligen Operationen Gruppen definieren:

- $G = \{2 + 3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen als Verknüpfung,
- $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wollen wir eine *reelle 2x2-Matrix* nennen, und $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ soll die Menge solcher Matrizen sein. Für zwei reelle 2x2-Matrizen definieren wir ihr Produkt als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$$

als *Determinante* der Matrix, und definieren

$$\text{Gl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Zeige:

- Für $A, B \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- $(\text{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 7: Es sei (G, \cdot) eine Gruppe und $a \in G$ sei fest gegeben. Wir definieren eine zweistellige Operation auf G durch

$$* : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \mapsto g * h = g \cdot (a \cdot h).$$

Überprüfe, ob $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 8: Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird \mathbb{R} mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe:

$$x * y = ax + ay + b \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$