Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2009/10, Blatt 5
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 23/11/2009, 10:00

Aufgabe Nummer 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17: Es sei $(G,\cdot)$ die Gruppe aus Aufgabe 5b. und $g=(0,1)\in G$. Zeige, daß die Abbildung

$$\alpha:(\mathbb{Z},+)\longrightarrow(G,\cdot):n\mapsto g^n$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Bestimme das Bild und den Kern von α. Ist α injektiv / surjektiv?

Aufgabe 18: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{Z},+)$.

Aufgabe 19: Es sei M eine Menge und $\sigma\in\operatorname{Sym}(M)$ eine bijektive Selbstabbildung von M. Wir definieren

$$m\sim n \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, k\in\mathbb{Z}\;:\;\sigma^k(m)=n$$

für $m,n\in M$. Beweise die folgenden Aussagen:

a. Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b. Es sei $m\in M$ so, daß die Äquivalenzklasse $\overline{m}$ von m die Mächtigkeit $n<\infty$ hat. Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Das Minimum $k=\min\{l>0\mid\sigma^l(m)=m\}$ existiert.

   (b) Für $q\in\mathbb{Z}$ gilt $\sigma^{q\cdot k}(m)=m$.

   (c) $\overline{m}=\big\{m,\sigma(m),\ldots,\sigma^{k-1}(m)\big\}$.

   (d) $k=n$.

c. Es sei $M=\{1,\ldots,7\}$ und $\sigma\in\operatorname{Sym}(M)=\mathbb{S}_7$ sei durch folgende Wertetabelle gegeben:

a	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(a)$	2	5	4	3	7	6	1

   Was sind die Äquivalenzklassen bezüglich obiger Äquivalenzrelation?

Aufgabe 20: Es sei $\alpha:(G,\cdot)\longrightarrow(H,*)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g\in G$. Wir nennen die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g die *Ordnung* von g und bezeichnen sie mit $o(g):=|\langle g\rangle|$. Zeige:

a. Ist $o(g)<\infty$, so ist $o(g)$ ein Vielfaches von $o\big(\alpha(g)\big)$.

b. Ist α injektiv, so gilt $o(g)=o\big(\alpha(g)\big)$.

Hinweis, verwende Aufgabe 15. – Es ist ein wichtiges Prinzip, daß ein Monomorphismus alle guten Eigenschaften einer Gruppe bzw. ihrer Elemente erhält. Die Ordnung eines Elementes ist ein Beispiel für dieses Prinzip.