Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2009/10, Blatt 7

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 07/12/2009, 10:00

Aufgabe Nummer 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Betrachte nochmals die Permutationen $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_8$ aus Aufgabe 22.

a. Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

b. Schreibe π^{-1} als Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

c. Berechne für jede der Permutationen in Aufgabe 22 a. das Signum.

Aufgabe 26: (Die Produktformel)
Es seien $U, V \leq G$ Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$.

a. Zeige, daß durch
$$(u, v) \sim (u', v') \iff u \cdot v = u' \cdot v'$$
eine Äquivalenzrelation auf der Menge $U \times V$ definiert wird.

b. Zeige, daß die Äquivalenzklasse von $(u, v) \in U \times V$ die Gestalt
$$\overline{(u, v)} = \left\{ \left(u \cdot y, y^{-1} \cdot v\right) \mid y \in U \cap V \right\}$$
besitzt und die Mächtigkeit $|U \cap V|$ hat.

c. Beweise, wenn U und V endlich sind, so gilt die Produktformel
$$|U \cdot V| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|}.$$

Aufgabe 27: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \leq G$. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a. $gug^{-1} \in U$ für alle $u \in U$ und alle $g \in G$.

b. $gUg^{-1} = U$ für alle $g \in G$.

c. $gU = Ug$ für alle $g \in G$.

d. $(gU) \cdot (hU) = ghU$ für alle $g, h \in G$.

Hinweis: Um die Äquivalenz von mehreren Aussagen zu zeigen, kann man einen sogenannten Ringschluß machen. Es reicht zu zeigen: "a. $\Rightarrow$ b. $\Rightarrow$ c. $\Rightarrow$ d. $\Rightarrow$ a.", denn aus "a. $\Rightarrow$ b." und "b. $\Rightarrow$ c." folgt z.B. "a. $\Rightarrow$ c.", d.h. die scheinbar noch fehlenden Implikationen ergeben sich von selbst.

Aufgabe 28: Bestimme alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4) \circ (1\ 5) \rangle$.