Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2009/10, Blatt 8

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 14/12/2009, 10:00

Aufgabe Nummer 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29: Es seien $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_n$ zwei Permuatationen.

a. Zeige, ist $\sigma = (a_1 \ \ldots \ a_k)$ ein k-Zykel, so ist

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = \big(\pi(a_1) \ \ldots \ \pi(a_k)\big).$$

b. Zeige, ist $\sigma = (a_{1,1} \ \ldots \ a_{1,k_1}) \circ \ldots \circ (a_{t,1} \ \ldots \ a_{t,k_t})$ die disjunkte Zyklenzerlegung von σ, so ist

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = \big(\pi(a_{1,1}) \ \ldots \ \pi(a_{1,k_1})\big) \circ \ldots \circ \big(\pi(a_{t,1}) \ \ldots \ \pi(a_{t,k_t})\big)$$

die disjunkte Zyklenzerlegung von $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$.

Aufgabe 30:

a. Ist $\mathbb{K}_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$?

b. Ist $\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$?

Aufgabe 31: Zeige, daß jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

Aufgabe 32:

a. Betrachte für $m, n, a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Element $\big(\overline{a}_m, \overline{b}_n\big) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$. Zeige, daß sich die Ordnung dieses Elementes wie folgt berechnen läßt

$$o\Big(\big(\overline{a}_m, \overline{b}_n\big)\Big) = \mathrm{kgv}\Big(o\big(\overline{a}_m\big), o\big(\overline{b}_n\big)\Big) = \mathrm{kgv}\left(\frac{\mathrm{kgv}(a, m)}{a}, \frac{\mathrm{kgv}(b, n)}{b}\right)$$

und daß sie ein Teiler von $\mathrm{kgv}(m, n)$ ist.

b. Zeige, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ist nicht zyklisch, wenn m und n nicht teilerfremd sind.

c. Berechne die Ordnung von $\big(\overline{10}_{24}, \overline{12}_{34}\big) \in \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{34}$.