

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 04/01/2010, 10:00

Aufgabe Nummer 36 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenden zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 33: Es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Zeige, $U/U \cap N \cong UN/N$.

Aufgabe 34: Es sei (G, \cdot) eine Gruppe, $g \in G$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Zeige, genau dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ mit $\alpha(\bar{1}) = g$, wenn die Ordnung von g ein Teiler von n ist.

Aufgabe 35: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ nach $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Aufgabe 36:

- a. Sei (G, \cdot) eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, dann sind die folgenden Abbildungen *bijektiv*:

$$\{U \leq G \mid N \subseteq U\} \longrightarrow \{\bar{U} \mid \bar{U} \leq G/N\} : U \mapsto U/N$$

und

$$\{M \trianglelefteq G \mid N \subseteq M\} \longrightarrow \{\bar{M} \mid \bar{M} \trianglelefteq G/N\} : M \mapsto M/N.$$

- b. Ist $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive ganze Zahl, so gilt

$$\bar{U} \leq \mathbb{Z}_n \iff \exists m \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } m \text{ teilt } n \text{ und } \bar{U} = m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \bar{m}_n \rangle.$$

Insbesondere sind alle Untergruppen von \mathbb{Z}_n zyklisch.

- c. Bestimme alle Untergruppen von \mathbb{Z}_{34} .