Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2009/10, Blatt 10

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 11/01/2009, 10:00

Aufgabe Nummer 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 37: Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe mit $|G| \geq 2$ und für je zwei Elemente $g, h \in G \setminus \{e\}$ soll es einen Automorphismus $\alpha : G \longrightarrow G$ geben mit $\alpha(g) = h$.
Zeige, es gibt eine Primzahl p, so daß $o(g) = p$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.

Hinweis, man kann die Aufgabe 20 gewinnbringend einsetzen und man sollte sich geeignete Potenzen von g anschauen.

Aufgabe 38:

a. Es sei R ein Ring mit Eins und $S \subset R$ ein nicht-leere Teilmenge für die gilt:

- $x + y \in S$ für alle $x, y \in S$,
- $-x \in S$ für alle $x \in S$,
- $x \cdot y \in S$ für alle $x, y \in S$ und
- $1_R \in S$.

Zeige, S ist ein Ring mit Eins bezüglich der Einschränkung der Addition und der Multiplikation von R auf S.

b. Für $\omega \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnen wir mit $\sqrt{-\omega}$ die komplexe Zahl $i \cdot \sqrt{\omega}$.
Zeige, $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}] := \{a + b \cdot \sqrt{-\omega} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

c. Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]^*$.

Hinweis, in Teil b. sollte man Teil a. anwenden, und für den Teil c. sollte man ausnutzen, daß das Betragsquadrat komplexer Zahlen multiplikativ ist, d.h. daß $|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$ für je zwei komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 39: Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und

$$\mathrm{NNT}(R) = \{a \in R \mid a \cdot c \neq 0 \text{ für alle } c \in R \setminus \{0\}\}.$$

Zeige, $a \cdot b \in \mathrm{NNT}(R)$ für alle $a, b \in \mathrm{NNT}(R)$.

Aufgabe 40: Überprüfe, ob die folgenden Nummern gültige EAN-13 sind:

a. 9783540891062

b. 6720140021002