Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2009/10, Blatt 11

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 18/01/2010, 10:00

Aufgaben Nummer 43 und 44 sind Präsenzaufgaben und brauchen nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 41: Ist die formale Potenzreihe $f = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \cdot t^k$ eine Einheit $R[[t]]$ für $R = \mathbb{Q}$ bzw. für $R = \mathbb{Z}$? Begründe Deine Antwort und finde ggf. das Inverse von f.

Aufgabe 42: Sei S ein kommutativer Ring mit Eins, $R \subseteq S$ ein Unterring und $b \in S$.

a. Wir definieren

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b^k \in S$$

für $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in R[t]$. Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi_b : R[t] \longrightarrow S : f \mapsto f(b)$$

ein Ringhomomorphismus* ist.

b. Zeige, wenn b Nullstelle des Polynoms $g = t^n + \alpha_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 \in R[t]$ ist, so ist

$$\operatorname{Im}(\varphi_b) = \left\{ a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot b^{n-1} \;\middle|\; a_0, \ldots, a_{n-1} \in R \right\}.$$

Wir bezeichnen diesen Unterring† von S mit $R[b] = \operatorname{Im}(\varphi_b)$.

c. Gib mit Hilfe von Teil b. eine möglichst effiziente Darstellung für den Ring $\mathbb{Z}[i]$ an, wobei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist.

Hinweis, in Teil b. sollte man für die Inklusion von $\operatorname{Im}(\varphi_b)$ in der rechten Seite zunächst mit Induktion zeigen, daß b^k für alle $k \in \mathbb{N}$ in der rechten Seite enthalten ist, und dann, daß die rechte Seite abgeschlossen bezüglich endlicher R-Linearkombinationen ist.

Aufgabe 43: Zeige, daß die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_2 : x + y \cdot i \mapsto \overline{x^2 + y^2}.$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 44:

a. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der genau zwei Ideale besitzt. Zeige, R ist ein Körper.

b. Zeige, daß $\mathbb{Z}_5$ ein Körper ist.

c. Ist $\mathbb{Z}_6$ auch ein Körper?

Hinweis zu Teil a., für $a \in R$ ist das Erzeugnis von a gerade die Menge $\langle a \rangle_R = \{x \cdot a \mid x \in R\}$ ist!

---

*Eine Abbildung $\varphi : R \longrightarrow S$ zwischen zwei Ringen R und S ist ein Ringhomomorphismus, wenn $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in R$ sowie $\varphi(1_R) = 1_S$ gelten.

†Es braucht nicht gezeigt, zu werden, daß $\operatorname{Im}(\varphi_b)$ ein Unterring von S ist. Dies gilt für Bilder von Ringhomomorphismen immer.