Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 25/01/2010, 10:00

Aufgabe Nummer 48 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 45: Welche der folgenden Mengen ist ein Ideal in $\mathbb{Q}[t]$?

a. $I = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(0) = 1\}$.

b. $J = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(1) = 0\}$.

Aufgabe 46: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nur endlich viele Elemente enthält. Zeige, dann ist jedes Element von R entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

Hinweis, für $a \in R$ betrachte man die Abbildung $R \longrightarrow R : x \mapsto a \cdot x$.

Aufgabe 47: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $I, J \trianglelefteq R$ seien Ideale, so daß es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ gibt mit $x + y = 1$.
Zeige, die beiden Ringe $R/(I \cap J)$ und $(R/I) \times (R/J)$ sind isomorph.

Hinweis, man betrachte die Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R/I \times R/J : a \mapsto (\overline{a}, \overline{a}) = (a + I, a + J)$.

Aufgabe 48:

a. (a) Finde alle Gruppenhomomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}_8, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$

(b) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(c) Für eine positive ganze Zahl n definieren wir die Abbildung

$$\phi_n : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{Z}_n[t] : \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} \cdot t^k.$$

Zeige, daß ϕ_n ein Ringepimorphismus ist. Wir nennen ϕ_n *Reduktion modulo* n.

b. (a) Bestimme $\mathbb{Z}_8^*$.

(b) Zeige, für alle $n \geq 2$ ist $\overline{n-1} \in \mathbb{Z}_n$ eine Einheit.