Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2009/10, Blatt 13
Thomas Markwig

# Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 01/02/2010, 10:00

Aufgabe Nummer 52 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 49:**

a. Zeige, für je zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$19 \mid 10a + b \quad \Longleftrightarrow \quad 19 \mid a + 2b.$$

b. Zeige, eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

**Aufgabe 50:** Sei $R$ ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

a. Zeige, ist $g \in \mathrm{ggT}(a, b)$, dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

b. Bestimme alle größten gemeinsamen Teiler von $f = t^2+4$ und $g = t^3+4t$ in $\mathbb{Z}[t]$.

**Aufgabe 51:** Es sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ mit $\mathrm{lc}(f) = 1$. Zeige, falls es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\phi_p(f)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_p[t]$ ist, so ist $f$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$.

Hinweis, $\phi_p$ bezeichnet die Reduktion modulo $p$ aus Aufgabe 48.

**Aufgabe 52:**

a. Ist $K$ ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Zeige, $f$ ist genau dann irreduzibel, wenn $f$ keine Nullstelle hat.

b. Bestimme alle irreduziblen Polynome $f$ in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad $\deg(f) \leq 4$.

c. Ist $f = t^4 + 123t^3 + 40t^2 + 8t + 1155 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?

d. Ist $f = t^3 + 6021t^2 + 1581t + 3319 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?