Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2009/10, Blatt 14

# Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 08/02/2010, 10:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 53:** Betrachte die Polynome

$$f = t^5 + 8t^4 + 13t^3 + 9t^2 + 20t + 12 \in \mathbb{Z}[t]$$

und

$$g = t^4 - 3t^3 + t^2 - 2t - 3 \in \mathbb{Z}[t].$$

a. Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler von $f$ und $g$ in $\mathbb{Q}[t]$ mittels des euklidischen Algorithmus.

b. Betrachte wie in Aufgabe 51 die Reduktion von $f$ und $g$ modulo 5 und bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der resultierenden Polynome in $\mathbb{Z}_5[t]$.

**Aufgabe 54:** Es sei $I = \langle 5, t-3\rangle_{\mathbb{Z}[t]}$ das von 5 und $t-3$ erzeugte Ideal im Polynomring $\mathbb{Z}[t]$, und die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[t]/I : z \mapsto \overline{z},$$

ordne einer ganzen Zahl $z$ ihre Restklasse in dem Faktorring $\mathbb{Z}[t]/I$ zu.
Zeige, daß $\alpha$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist und berechne $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Hinweis: Für die Surjektivität zeige man, daß es für jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[t]$ eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\overline{f} = \overline{z}$ in $\mathbb{Z}[t]/I$ gilt. Dabei kann man $\overline{t} = \overline{3}$ ausnutzen! Wieso gilt dies? Bei der Berechnung des Kerns beachte man, daß $\overline{z} = \overline{0}$ bedeutet, daß $z \in I$ eine Linearkombination von 5 und $t-3$ ist.

**Aufgabe 55:** Zeige, daß $\mathbb{Z}[i] = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion $\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : a \mapsto |a|^2$ ist.

Hinweis, wenn man $a$ durch $b$ mit Rest dividieren will, sollte man sich zunächst die komplexe Zahl $\frac{a}{b}$ anschauen und sich überlegen, wie weit sie von einer Zahl in $\mathbb{Z}[i]$ entfernt ist.

**Aufgabe 56:** Zeige, $f = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ ist irreduzibel und $K = \mathbb{Z}_2[t]/\langle f\rangle$ ist ein Körper mit 4 Elementen. Stelle die Additions- und Multiplikationstabelle für $K$ auf. Ist $K$ isomorph zum Ring $\mathbb{Z}_4$ oder zum Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$? Betrachten wir den Polynomring $K[x]$ über $K$ in der Unbestimmten $x$. Ist das Polynom $g = x^2 + x + \overline{1} \in K[x]$ irreduzibel? Hat $g$ eine Nullstelle in $K$?

Anmerkung, in dieser Aufgabe wollen wir die Elemente $\overline{0}$ und $\overline{1}$ in $\mathbb{Z}_2$ der Einfachheit halber mit $0$ und $1$ bezeichnen, wobei $1 + 1 = 0$ gilt. Das ist deshalb sinnvoll, weil auch die Elemente von $\mathbb{Z}_2[t]/\langle f\rangle$ wieder Restklassen sind, und die doppelten Restklassen (z.B. $\overline{t + \overline{1}}$) für unnötige Verwirrung sorgen.