Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 1

Algebraische Strukturen

Die Aufgaben des ersten Übungsblattes sind als Präsenzaufgaben für die Übungsstunden der ersten Woche gedacht.

Aufgabe 1: Es seien $(G,\cdot)$ und $(H,*)$ zwei Gruppen. Wir definieren auf der Menge $G\times H=\{(x,y)\mid x\in G, y\in H\}$ eine zweistellige Operation durch

$$(x,y)\circ(x',y'):=(x\cdot x', y*y')$$

für $(x,y),(x',y')\in G\times H$. Zeige, daß dann $(G\times H,\circ)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2: Untersuche, ob die folgende zweistellige Operation die Menge $G:=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ zu einer Gruppe macht:

$$G\times G\longrightarrow G:\big((a,b),(a',b')\big)\mapsto(a,b)\cdot(a',b'):=(aa',bb').$$

Aufgabe 3: Wir definieren auf der Menge $G=\{0,1\}$ eine zweistellige Operation, indem wir alle Produkte $a*b$ in einer Tabelle angeben, wobei in der ersten Spalte alle möglichen Werte von a und in der ersten Zeile alle möglichen Werte von b aufgeführt sind:

$a*b$	0	1
0	0	1
1	1	0

Zeige, daß $(G,*)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 4: Sei M eine Menge. Für zwei Abbildungen $f:M\to M$ und $g:M\to M$ definieren wir die *Komposition* von f und g durch

$$f\circ g: M\to M: m\mapsto f\big(g(m)\big).$$

Wir nennen eine Abbildung $f:M\to M$ *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $f':M\to M$ gibt, so daß

$$f\circ f'=f'\circ f=\mathrm{id}_M,$$

wobei $\mathrm{id}_M: M\to M: m\mapsto m$ die Identität auf M ist. Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Sym}(M)=\{f:M\to M\mid f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, $\big(\mathrm{Sym}(M),\circ\big)$ ist eine Gruppe.