Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 4

# Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 12/11/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 13:** Überprüfe, ob die folgende Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : z \mapsto 4 \cdot z + 2$$

ein Endomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

**Aufgabe 14:** Betrachte die Gruppe $(G, \cdot)$ aus Blatt 2, Aufgabe 5b. und die Gruppe $(U, \cdot)$ aus Blatt 3, Aufgabe 12. Zeige, die Abbildung

$$\alpha : G \longrightarrow U : (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

**Aufgabe 15:** Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$. Zeige:

a. Die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow G : n \mapsto g^n$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Bild $\mathrm{Im}(\alpha) = \langle g \rangle$.

b. Gibt es ganze Zahlen $k \neq l$ mit $g^k = g^l$, so existiert die Zahl

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > 0, g^m = e_G\}$$

und es gelten:

(a) $\{m \in \mathbb{Z} \mid g^m = e\} = n\mathbb{Z}$,

(b) $\langle g \rangle = \{e_G, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$, und

(c) $|\langle g \rangle| = n$.

Hinweis: In Teil b. verwende man die Division mit Rest für ganze Zahlen, d.h. die Eigenschaft, daß es für zwei ganze Zahlen $m$ und $n$ mit $n \neq 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen $q$ und $r$ gibt mit $m = q \cdot n + r$ und $0 \leq r < |n|$. $r$ heißt der Rest von $m$ durch $n$ bei Division mit Rest. Diese Art, ganze Zahlen zu teilen kennt Ihr schon aus der Grundschule.

**Aufgabe 16:** Wir wissen bereits, daß $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition eine Gruppe ist. Welche der folgenden Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus / -monomorphismus / -epimorphismus / -isomorphismus?

a. $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - y, y - x)$.

b. $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + x \cdot y, 2x)$.

c. $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x)$.

Welche der Aussagen bleiben richtig, wenn wir $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{Z}^2$ ersetzen?