Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 5

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 19/11/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17:

a. Betrachte die Gruppe $(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \circ)$ aus Aufgabe 6 auf Blatt 2 und zeige, daß die dort definierte Determinante

$$\det : \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

ein Gruppenepimorphismus auf die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist, und bestimme alle oberen Dreiecksmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

im Kern von det.

b. Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$.

Aufgabe 18: Sei $\alpha : (G, \cdot) \longrightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Wir nennen die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g die *Ordnung* von g und bezeichnen sie mit $o(g) := |\langle g \rangle|$. Zeige:

a. Ist $o(g) < \infty$, so ist $o(g)$ ein Vielfaches von $o\big(\alpha(g)\big)$.

b. Zeige, α ist genau dann injektiv, wenn $o(g) = o\big(\alpha(g)\big)$ für alle $g \in G$ gilt.

Hinweis, verwende in Teil a. Aufgabe 15.

Aufgabe 19: Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_8.$$

Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, π^{-1}.

Aufgabe 20: Es sei $(G, \cdot)$ die Gruppe aus Aufgabe 5b. und $g = (0, 1) \in G$. Zeige, daß die Abbildung

$$\alpha : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (G, \cdot) : n \mapsto g^n$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Bestimme das Bild und den Kern von α. Ist α injektiv / surjektiv?