Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 6

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 26/11/2013, 10:00

Die Aufgaben Nummer 19 d. und 24 sind Präsenzaufgaben und brauchen nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 21: Betrachte nochmals die Permutationen $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_8$ aus Aufgabe 19.

a. Bestimme für jede der Permutationen $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, und π^{-1} aus Aufgabe 19 die Zyklenzerlegung.

b. Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

c. Schreibe π^{-1} als Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

d. Berechne für jede der Permutationen $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, und π^{-1} aus Aufgabe 19 das Signum.

Aufgabe 22: Finde zwei Untergruppen von $\mathbb{S}_4$, die beide die Mächtigkeit 4 besitzen, aber nicht isomorph zueinander sind. Begründe, weshalb es Untergruppen sind und weshalb sie nicht isomorph zueinander sind.

Aufgabe 23: (Die Produktformel)

Es seien $U, V \leq G$ Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$.

a. Zeige, daß durch

$$(u, v) \sim (u', v') \iff u \cdot v = u' \cdot v'$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $U \times V$ definiert wird.

b. Zeige, daß die Äquivalenzklasse von $(u, v) \in U \times V$ die Gestalt

$$\overline{(u, v)} = \left\{ \left(u \cdot y, y^{-1} \cdot v\right) \mid y \in U \cap V \right\}$$

besitzt und die Mächtigkeit $|U \cap V|$ hat.

c. Beweise, wenn U und V endlich sind, so gilt die Produktformel

$$|U \cdot V| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|},$$

wobei $U \cdot V := \{u \cdot v \mid u \in U, v \in V\}$.

Aufgabe 24: Bestimme die Elemente der Untergruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4) \circ (2\ 3) \rangle \leq \mathbb{S}_5$ von $\mathbb{S}_5$.