Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2013/14, Blatt 7

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 03/12/2013, 10:00
Aufgabe Nummer 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \leq G$. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a. $gug^{-1} \in U$ für alle $u \in U$ und alle $g \in G$.

b. $gUg^{-1} = U$ für alle $g \in G$.

c. $gU = Ug$ für alle $g \in G$.

d. $(gU) \cdot (hU) = ghU$ für alle $g, h \in G$.

Hinweis: Um die Äquivalenz von mehreren Aussagen zu zeigen, kann man einen sogenannten Ringschluß machen. Es reicht zu zeigen: “a. $\Rightarrow$ b. $\Rightarrow$ c. $\Rightarrow$ d. $\Rightarrow$ a.”, denn aus “a. $\Rightarrow$ b.” und “b. $\Rightarrow$ c.” folgt z.B. “a. $\Rightarrow$ c.”, d.h. die scheinbar noch fehlenden Implikationen ergeben sich von selbst.

Aufgabe 26:

a. Zeige, ist $\sigma = (a_1 \ \ldots \ a_k) \in \mathbb{S}_n$ ein k-Zykel und $\pi \in \mathbb{S}_n$, so ist

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = \big(\pi(a_1) \ \ldots \ \pi(a_k)\big).$$

b. Überprüft, ob $\mathbb{K}_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$ ist, d.h. ob $\mathbb{K}_4$ einer der vier äquivalenten Bedingungen in Aufgabe 25 genügt?

c. Überprüft, ob $\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$, d.h. ob $\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$ einer der vier äquivalenten Bedingungen in Aufgabe 25 genügt?

Aufgabe 27: Zeige, daß jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

Aufgabe 28: Bestimme alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4) \circ (2\ 3)\rangle$.