Fachbereich Mathematik Wintersemester 2013/14, Blatt 10
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 07/01/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 37:

a. Für $\omega \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnen wir mit $\sqrt{-\omega}$ die komplexe Zahl $i \cdot \sqrt{\omega}$.
   Zeige, $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}] := \{a + b \cdot \sqrt{-\omega} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

b. Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]^*$.

Hinweis, für den Teil b. sollte man ausnutzen, daß das Betragsquadrat komplexer Zahlen multiplikativ ist, d.h. daß $|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$ für je zwei komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 38: Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und

$$\mathrm{NNT}(R) = \{a \in R \mid a \cdot c \neq 0 \text{ für alle } c \in R \setminus \{0\}\}.$$

Zeige, $a \cdot b \in \mathrm{NNT}(R)$ für alle $a, b \in \mathrm{NNT}(R)$.

Aufgabe 39: Sei S ein kommutativer Ring mit Eins, $R \subseteq S$ ein Unterring und $b \in S$. Wir definieren

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b^k \in S$$

für $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in R[t]$. Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi_b : R[t] \longrightarrow S : f \mapsto f(b)$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 40:

a. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der genau zwei Ideale besitzt.
   Zeige, R ist ein Körper.

b. Zeige, daß $\mathbb{Z}_5$ ein Körper ist.

c. Ist $\mathbb{Z}_6$ auch ein Körper?

Hinweis zu Teil a., für $a \in R$ ist das Erzeugnis von a gerade die Menge $\langle a \rangle_R = \{x \cdot a \mid x \in R\}$!