Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2013/14, Blatt 11

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 14/01/2013, 10:00
Aufgabe 44 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 41: Ist die formale Potenzreihe $f = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \cdot t^k$ eine Einheit $R[[t]]$ für $R = \mathbb{Q}$ bzw. für $R = \mathbb{Z}$? Begründe Deine Antwort und finde ggf. das Inverse von f.

Aufgabe 42: Sei S ein kommutativer Ring mit Eins, $R \subseteq S$ ein Unterring und $b \in S$ sei $\varphi_b : R[t] \longrightarrow S : f \mapsto f(b)$ der Ringhomomorphismus aus Aufgabe 39.
Zeige, wenn b Nullstelle des Polynoms $g = t^n + \alpha_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 \in R[t]$ ist, $n \geq 1$, so ist

$$\mathrm{Im}(\varphi_b) = \left\{ a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot b^{n-1} \;\middle|\; a_0, \ldots, a_{n-1} \in R \right\}.$$

Man bezeichnet diesen Unterring von S mit $R[b]$ (siehe Aufgabe 37 für ein Beispiel).
Hinweis, man sollte für die Inklusion von $\mathrm{Im}(\varphi_b)$ in der rechten Seite mit Induktion nach m zeigen, daß $\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot b^k$ in der rechten Seite enthalten ist. Dabei ist die Gleichung $b^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i \cdot b^i$ von Nutzen.

Aufgabe 43: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $I, J \trianglelefteq R$ seien Ideale, so daß es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ gibt mit $x + y = 1$.
Zeige, die beiden Ringe $R/(I \cap J)$ und $(R/I) \times (R/J)$ sind isomorph.
Hinweis, man betrachte die Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R/I \times R/J : a \mapsto (\overline{a}, \overline{a}) = (a + I, a + J)$.

Aufgabe 44:

a. Zeige, daß die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_2 : x + y \cdot i \mapsto \overline{x^2 + y^2}.$$

ein Ringhomomorphismus ist. Was ist der Kern von α?

b. Welche der folgenden Mengen ist ein Ideal in $\mathbb{Q}[t]$?

(a) $I = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(0) = 1\}$.

(b) $J = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(1) = 0\}$.