Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 12

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 21/01/2014, 10:00

Aufgabe Nummer 48 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 45: Zeige, eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 46: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nur endlich viele Elemente enthält. Zeige, dann ist jedes Element von R entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

Hinweis, für $a \in R$ betrachte man die Abbildung $R \longrightarrow R : x \mapsto a \cdot x$.

Aufgabe 47: Sei R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

a. Zeige, ist $g \in \mathrm{ggT}(a, b)$, dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

b. Bestimme alle größten gemeinsamen Teiler von $f = t^2+4$ und $g = t^3+4t$ in $\mathbb{Z}[t]$.

Aufgabe 48:

a. Für eine positive ganze Zahl n definieren wir die Abbildung

$$\phi_n : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{Z}_n[t] : \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} \cdot t^k.$$

Zeige, daß ϕ_n ein Ringepimorphismus ist. Wir nennen ϕ_n *Reduktion modulo* n.

b. Es sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ mit $\mathrm{lc}(f) = 1$. Zeige, falls es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\phi_p(f)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_p[t]$ ist, so ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$.