Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 13

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 28/01/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 52 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49: Es sei $I = \langle 5, t-3 \rangle_{\mathbb{Z}[t]}$ das von 5 und $t-3$ erzeugte Ideal im Polynomring $\mathbb{Z}[t]$, und die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[t]/I : z \mapsto \overline{z},$$

ordne einer ganzen Zahl z ihre Restklasse in dem Faktorring $\mathbb{Z}[t]/I$ zu.
Zeige, daß α ein surjektiver Ringhomomorphismus ist und berechne $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Hinweis: Für die Surjektivität zeige man, daß es für jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[t]$ eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\overline{f} = \overline{z}$ in $\mathbb{Z}[t]/I$ gilt. Dabei kann man $\overline{t} = \overline{3}$ ausnutzen! Wieso gilt dies? Bei der Berechnung des Kerns beachte man, daß $\overline{z} = \overline{0}$ bedeutet, daß $z \in I$ eine Linearkombination von 5 und $t - 3$ ist.

Aufgabe 50: Zeige, daß $\mathbb{Z}[i] = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion $\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : a \mapsto |a|^2$ ist.

Hinweis, wenn man a durch b mit Rest dividieren will, sollte man sich zunächst die komplexe Zahl $\frac{a}{b}$ anschauen und sich überlegen, wie weit sie von einer Zahl in $\mathbb{Z}[i]$ entfernt ist.

Aufgabe 51: Zeige, $f = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ ist irreduzibel und $K = \mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ ist ein Körper mit 4 Elementen. Stelle die Additions- und Multiplikationstabelle für K auf. Ist K isomorph zum Ring $\mathbb{Z}_4$ oder zum Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$? Betrachten wir den Polynomring $K[x]$ über K in der Unbestimmten x. Ist das Polynom $g = x^2 + x + \overline{1} \in K[x]$ irreduzibel? Hat g eine Nullstelle in K?

Anmerkung, in dieser Aufgabe wollen wir die Elemente $\overline{0}$ und $\overline{1}$ in $\mathbb{Z}_2$ der Einfachheit halber mit 0 und 1 bezeichnen, wobei $1 + 1 = 0$ gilt. Das ist deshalb sinnvoll, weil auch die Elemente von $\mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ wieder Restklassen sind, und die doppelten Restklassen (z.B. $\overline{t + \overline{1}}$) für unnötige Verwirrung sorgen.

Aufgabe 52:

a. Ist K ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$.
   Zeige, f ist genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle hat.

b. Bestimme alle irreduziblen Polynome f in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad $\deg(f) \leq 4$.

c. Ist $f = t^4 + 123t^3 + 40t^2 + 8t + 1155 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?

d. Ist $f = t^3 + 6021t^2 + 1581t + 3319 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?