Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 04/02/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 53: Betrachte die Polynome

$$f = t^5 + 8t^4 + 13t^3 + 9t^2 + 20t + 12 \in \mathbb{Z}[t]$$

und

$$g = t^4 - 3t^3 + t^2 - 2t - 3 \in \mathbb{Z}[t].$$

a. Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[t]$ mittels des euklidischen Algorithmus.

b. Betrachte wie in Aufgabe 51 die Reduktion von f und g modulo 5 und bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der resultierenden Polynome in $\mathbb{Z}_5[t]$.

Aufgabe 54:

a. Sind die Gruppen $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_7, +)$ isomorph?

b. Sind die Gruppen $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_6, +)$ isomorph?

c. Sind die Gruppen $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{S}_3, \circ)$ isomorph?

Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 55:

a. Es sei R ein Integritätsbereich und $0 \neq f \in R[t]$ ein Polynom vom Grad $n = \deg(f)$. Zeige, f hat höchstens n Nullstellen.

b. Zeige, $1 + i$ ist prim in $\mathbb{Z}[i]$.

c. Betrachte den Ringhomomorphismus

$$\alpha : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_2 : x + y \cdot i \mapsto \overline{x^2 + y^2}.$$

aus Aufgabe 43. Berechne einen Erzeuger des Hauptideals $\operatorname{Ker}(\alpha)$.

Aufgabe 56: Bestimme mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes *alle* Lösungen des Kongruenzgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv -7 \pmod{15} \end{aligned}$$