Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 24.04.2019, 10:00

Aufgabe 1: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins.
Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Sind $0 \neq f, g \in R[t]$, so gibt es Polynome $q, r \in R[t]$ und eine natürliche Zahl $0 \leq k \leq \deg(g) + 1$, so daß

$$\mathrm{lc}(f)^k \cdot g = q \cdot f + r$$

und

$$\deg(r) < \deg(f).$$

(b) Ist $a \in R$ eine Nullstelle von g, so gibt es ein Polynom $q \in R[t]$ mit $g = q \cdot (t - a)$.

(c) Ist R ein Integritätsbereich, so hat g höchstens $\deg(g)$ paarweise verschiedene Nullstellen in R.

(d) Finde ein Beispiel für einen Ring R und ein Polynom $0 \neq g \in R[t]$ mit mehr als $\deg(g)$ Nullstellen.

Aufgabe 2: Es sei K ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $2 \leq \deg(f) \leq 3$. Zeige, f ist genau dann irreduzibel, wenn f in K keine Nullstelle hat.

Aufgabe 3: Zeige, ist R ein faktorieller Ring und $a \in \mathrm{Quot}(R)$ eine Nullstelle eines normierten Polynoms $0 \neq f \in R[t]$, dann gilt $a \in R$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper. Zeige, daß der Unterring*

$$R = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t] \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_1 = 0 \right\}$$

von $K[t]$ nicht faktoriell ist.

*Es braucht nicht gezeigt zu werden, daß R ein Unterring von $K[t]$ ist.