Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2019, Blatt 2

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 01.05.2019, 10:00

Aufgabe 5: Sei R ein Integritätsbereich. Beweise, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) R ist faktoriell.

(b) Der Schnitt zweier Hauptideale in R ist ein Hauptideal und für jede aufsteigende Kette

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$$

von Hauptidealen in R existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_n$ für alle $k \geq n$.

Aufgabe 6: Zeige, daß $K := \mathbb{F}_2[t]/\langle t^2 + t + 1\rangle$ ein Körper mit 4 Elementen ist und bestimme die Additions- und Multiplikationstabelle von K.*

Aufgabe 7: Zeige, daß folgende Polynome irreduzibel sind:

(a) $f = t^4 - 12t^2 - 8t + 6 \in \mathbb{Q}[t]$,

(b) $f = t^5 - t^4 + t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \in \mathbb{Q}[t]$,

(c) $f = y^3 - x^2y^2 + x^2 - 3xy + 1 \in \mathbb{Z}[x, y]$.

Aufgabe 8: Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden und sei $k \in \mathbb{Z}[t]$ normiert mit $\deg(k) < \frac{n}{2}$.
Zeige, daß das Polynom

$$f = (t - a_1) \cdot \ldots \cdot (t - a_n) \cdot k - 1$$

irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$ ist.

Hinweis: für eine Zerlegung $f = g \cdot h$ mit $g, h \in \mathbb{Z}[t]$ betrachte man die Zahlen $(g \cdot h)(a_i)$ und $(g + h)(a_i)$ in $\mathbb{Z}$, und man verwende Ergebnisse der Polynominterpolation, nämlich, daß ein Polynom vom Grad d durch seine Werte an $d + 1$ Stellen eindeutig festgelegt ist.

---

*Für eine Primzahl p bezeichnet $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ den Körper der Restklassen ganzer Zahlen modulo p.