

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 08.05.2019, 10:00

Aufgabe 9: Zeige für $m \geq 1$ die folgenden Aussagen:

- (a) Die Binomialkoeffizienten $\binom{2^m}{k}$ sind für $k = 1, \dots, 2^m - 1$ durch 2 teilbar.
- (b) Das Polynom $f = t^{2^m} + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[t]$.

Hinweis: in Teil (a) betrachte man das Polynom $(x+y)^{2^m}$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y]$, und in Teil (b) nutze man Teil (a).

Aufgabe 10: Berechne eine Primfaktorzerlegung der folgenden Polynome:

- (a) $f = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.
- (b) $f = t^4 + \bar{3}t^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[t]$.

Aufgabe 11: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist.

- (a) Zeige, daß für ein echtes Ideal $P \triangleleft R$ die folgenden Aussagen gleichwertig sind:
 - (1) Für $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in P$ gilt schon $a \in P$ oder $b \in P$.
 - (2) R/P ist ein Integritätsbereich.

Ein solches Ideal P heißt auch ein *Primideal* in R .

- (b) Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zorn, daß R ein minimales Primideal enthält, d.h. ein Primideal P , so daß es kein Primideal Q mit $Q \subsetneq P$ gibt.

Aufgabe 12: Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $f \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom, so daß die Reduktion \bar{f} modulo p irreduzibel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[t]$ ist. Zeige, dann ist das Ideal $\mathfrak{m} = \langle p, f \rangle$ in $\mathbb{Z}[t]$ ein maximales Ideal.