Fachbereich Mathematik Sommersemester 2019, Blatt 4
Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 15.05.2019, 10:00

Aufgabe 13: Sei K ein Körper und $f \in K[t] \setminus K$ habe die Primfaktorzerlegung

$$f = c \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

mit paarweise nicht assoziierten irreduziblen Polynomen p_i und mit $c \in K$.
Zeige, die maximalen Ideale in $K[t]/\langle f \rangle$ sind genau die Ideale $\langle \overline{p_i} \rangle$, $i = 1, \ldots, k$.

Aufgabe 14: Sei R ein kommutativer Ring und $J(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \lhd \cdot R} \mathfrak{m}$ der Durchschnitt aller maximalen Ideale. Zeige, $a \in J(R)$ genau dann, wenn $1 - a \cdot b \in R^*$ für alle $b \in R$.

Aufgabe 15: Sei M eine Menge und E sei eine Teilmenge der Potenzmenge von M mit $\emptyset \in E$. Zeige, die Menge

$$A = \{N \subseteq M \mid X \subseteq N \ \wedge \ |X| < \infty \implies X \in E\}$$

aller Teilmengen von M, deren endliche Teilmengen in E liegen enthält ein bezüglich der Inklusion maximales Element.

Aufgabe 16: Zeige, daß $f = t^3 + 3t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel ist und stelle für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$ die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{1+\alpha}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ dar.