Fachbereich Mathematik Sommersemester 2019, Blatt 5
Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 22.05.2019, 10:00

Aufgabe 17: Bestimme für folgende $\alpha \in \mathbb{R}$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ und den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$:

(a) $\alpha = \sqrt[n]{p}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und p Primzahl.

(b) $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$.

(c) $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Hinweis: in Teil c. berechne man den Wert zunächst näherungsweise mit einem Rechner.

Aufgabe 18: Zeige, eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Ring R mit $K \leq R \leq L$ schon ein Körper ist.

Aufgabe 19: Es sei L/K mit $L = K(\alpha)$ eine einfache Körpererweiterung und α sei algebraisch über K mit Minimalpolynom $\mu_\alpha^K \in K[t]$. Ferner sei

$$\mathcal{Z}(L/K) = \{N \mid K \leq N \leq L\}$$

die Menge der Zwischenkörper von L/K und

$$P = \{f \in L[t] \mid f \text{ teilt } \mu_\alpha^K \text{ in } L[t] \text{ und } \operatorname{lc}(f) = 1\}$$

die Menge der normierten Teiler des Polynoms μ_α^K im Polynomring $L[t]$.

(a) Zeige, die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{Z}(L/K) \longrightarrow P : N \mapsto \mu_\alpha^N,$$

wobei $\mu_\alpha^N \in N[t]$ das Minimalpolynom von α über N bezeichnet, ist wohldefiniert und hat die Linksinverse

$$\psi : P \longrightarrow \mathcal{Z}(L/K) : t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \mapsto K(a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

d.h. es gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{ZK(L/K)}$.

(b) Zeige, L/K hat höchstens $2^{|L:K|-1}$ Zwischenkörper.

Aufgabe 20: Es sei p ein Primzahl, $L = \operatorname{Quot}(\mathbb{F}_p[x,y])$ und $K = \operatorname{Quot}(\mathbb{F}_p[x^p, y^p])$. Zeige, die Körpererweiterung L/K ist endlich, aber nicht einfach.

Hinweis, betrachte $K(x + ay)$ für $a \in K$ und zeige u.a. $|L : K(y)| = |K(y) : K| = |K(x + ay) : K| = p$.