Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2019, Blatt 6

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 29.05.2019, 10:00

Aufgabe 21: Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad m und $f \in K[t]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Zeige, wenn m und n teilerfremd sind, so ist f auch irreduzibel in $L[t]$.

Hinweis, nutze aus, daß es eine Körpererweiterung von L gibt, in der f eine Nullstelle hat.

Aufgabe 22: Bestimme den Zerfällungskörper $\mathrm{ZFK}_{\mathbb{F}_3}(f)$ von $f = t^3 - t + 1 \in \mathbb{F}_3[t]$.

Aufgabe 23:

(a) Bestimme für $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ zwei komplexe Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so daß $\mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ der Zerfällungskörper von $f = t^p - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Berechne in Teil (a) den Grad der Körpererweiterung $|\mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) : \mathbb{Q}|$, wenn p eine Primzahl ist.

Aufgabe 24: Sei K ein Körper und $L = \mathrm{ZFK}_K(f)$ der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[t]$. Ferner sei $g \in K[t]$ irreduzibel und $N = \mathrm{ZFK}_K(g)$ der Zerfällungskörper von g über K.

(a) Zeige, wenn $\alpha \in N$ und $\beta \in N$ zwei Nullstellen von g sind, dann gibt es einen Körperisomorphismus

$$\varphi : L(\alpha) \longrightarrow L(\beta)$$

mit $\varphi_{|K} = \mathrm{id}_K$ und $\varphi(\alpha) = \beta$.

(b) Zeige, wenn g eine Nullstelle in L hat, so zerfällt g über L schon.