Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2019, Blatt 7

Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 05.06.2019, 10:00

Aufgabe 25: Zeige, jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.

Hinweis, für $0 \neq a \in R$ betrachte man die Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R : x \mapsto a \cdot x$.

Aufgabe 26: Es sei K ein Körper mit $|K| = q = p^k$ Elementen, $p = \operatorname{char}(K)$, und $n \in \mathbb{N}$ sei teilerfremd zu q. Ferner sei $m = \operatorname{ord}(\overline{q})$ die Ordnung von $\overline{q} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ von $\overline{q}$ als Element der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

(a) Zeige, der Zerfällungskörper $\mathrm{ZFK}_K(t^n - 1)$ ist im Zerfällungskörper $\mathrm{ZFK}_K(t^{q^m} - t)$ enthalten und

$$|\mathrm{ZFK}_K(t^{q^m} - t)| = q^m.$$

(b) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathrm{ZFK}_{\mathbb{F}_2}(t^7 - 1)$ über $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 27: Sei K ein Körper und $f \in K[t] \setminus K$ ein nicht-konstantes Polynom.

(a) Zeige, genau dann hat f im algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von K eine mehrfache Nullstelle, wenn f und seine formale Ableitung f' in $K[t]$ nicht teilerfremd sind.

(b) Sind f und f' teilerfremd in $K[t]$, so hat f keinen mehrfachen Primteiler in seiner Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 28: Zeige, daß die folgenden Aussagen für einen Körper K äquivalent sind:

(a) K ist algebraisch abgeschlossen.

(b) Es gibt einen Teilkörper $N \leq K$ von K, so daß K/N algebraisch ist und jedes Polynom in $N[t] \setminus N$ zerfällt über K.

(c) Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung, so ist $L = K$.