Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2019, Blatt 9

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 26.06.2019, 10:00

Aufgabe 33: Es sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p mit $|K| = p^n$ Elementen und $f \in \mathbb{F}_p[t]$ sei ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Zeige, f zerfällt über K in Linearfaktoren.

Hinweis: zeige $K/\mathbb{F}_p$ ist normal und K ist ein Stammkörper von f.

Aufgabe 34: Es sei L/K eine galoissche Körpererweiterung und es gebe ein $\alpha \in L$, so daß $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\mathrm{id}_L \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige, dann ist $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 35: Zeige, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ galoisch ist mit Galoisgruppe

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

und bestimme alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.

Hinweis: für die Bestimmung aller Zwischenkörper braucht man den Hauptsatz der Galoistheorie, der erst in der Vorlesung am Montag behandelt wird.

Aufgabe 36: Es sei K ein Körper und $L = \mathrm{ZFK}_K(f)$ der Zerfällungskörper eines irreduziblen, separablen Polynoms $f = t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0 \in K[t]$ vom Grad drei.

(a) Zeige, ist $f = (t - \alpha_1) \cdot (t - \alpha_2) \cdot (t - \alpha_3)$ eine Faktorisierung von f über dem Zerfällungskörper L, dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta(f) :=& a_1^2 \cdot a_2^2 - 4 \cdot a_1^3 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2^3 + 18 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 - 27 \cdot a_0^2 \\ \overset{!}{=}& (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \in K.\end{aligned}$$

Man nennt $\Delta(f)$ die *Diskriminante* von f.

(b) Zeige, ist $\Delta(f) \in \{q^2 \mid q \in K\}$ eine Quadratzahl in K, so gilt $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{A}_3$.

(c) Zeige, ist $\Delta(f) \notin \{q^2 \mid q \in K\}$ keine Quadratzahl in K, so gilt $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{S}_3$.

(d) Bestimme die Galoisgruppe von $f = t^3 - 3t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$.