

Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 03.07.2019, 10:00

Aufgabe 37: Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ mit $\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ aus Aufgabe 29 und zeige

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \leq \mathbb{S}_4.$$

Aufgabe 38: Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$. Bestimme den Zwischenkörperverband von K/\mathbb{Q} unter Verwendung der Ergebnisse aus Beispiel 11.2.

Aufgabe 39: Es seien $L = \text{ZFK}_{\mathbb{Q}}(t^4 - 2)$ der Zerfällungskörper von $t^4 - 2$ über \mathbb{Q} und $\mathbb{D}_8 := \langle \pi, \tau \rangle \leq \mathbb{S}_4$ mit $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)$ und $\tau = (2\ 4)$.

(a) Zeige, $\pi^4 = \tau^2 = \text{id}$ und $\tau \circ \pi = \pi^3 \circ \tau$ und leite daraus ab, daß

$$\mathbb{D}_8 = \{\pi^m \circ \tau^n \mid 0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 1\}$$

Ordnung 8 hat.

(b) Bestimme den Untergruppenverband von \mathbb{D}_8 .

(c) Zeige, die Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ enthält zwei \mathbb{Q} -Automorphismen σ und ω mit

$$\langle \sigma, \omega \rangle \cong \mathbb{D}_8.$$

(d) Bestimme den Zwischenkörperverband von L/\mathbb{Q} .

Hinweis: in Teil c. nutze man, daß ein \mathbb{Q} -Automorphismus von L/\mathbb{Q} die Nullstellen von $t^4 - 2$ und von $t^2 + 1$ permutiert und dadurch festgelegt ist.

Aufgabe 40: Zeige, daß das Polynom $f = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2[t]$ ist und bestimme einen Erzeuger für K^* mit $K = \mathbb{F}_2[t]/\langle f \rangle$. Zeige schließlich, daß ein primitives Element α für K/\mathbb{F}_2 kein Erzeuger von K^* sein muß.