Thomas Markwig

# Algebra

Abgabetermin: Mittwoch, 17.07.2019, 10:00

Nur die Aufgaben 45-47 brauchen zur Korrektur eingereicht zu werden. Die Aufgaben 48-50 sollen als Präsenzaufgaben für die Übung vorbereitet werden.

**Aufgabe 45:** Es sei $G$ eine endliche Gruppe. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist $G$ abelsch.

(b) Ist $|G| = p^2$ für eine Primzahl $p$, so ist $G$ abelsch.

**Aufgabe 46:** Die endliche Gruppe $G$ operiere transitiv auf der endlichen Menge $\Omega$ mit $|\Omega| \geq 2$. Zeige, es gibt ein $g \in G$ ohne Fixpunkt, d.h. $g * \omega \neq \omega$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

**Aufgabe 47:** Es seien $U, V \leq G$ Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$.

(a) Zeige, daß durch

$$(u, v) \sim (u', v') \iff u \cdot v = u' \cdot v'$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $U \times V$ definiert wird.

(b) Zeige, daß die Äquivalenzklasse von $(u, v) \in U \times V$ die Gestalt

$$\overline{(u, v)} = \left\{ \left(u \cdot y, y^{-1} \cdot v\right) \mid y \in U \cap V \right\}$$

besitzt und die Mächtigkeit $|U \cap V|$ hat.

(c) Beweise, wenn $U$ und $V$ endlich sind, so genügt die Mächtigkeit der Menge

$$U \cdot V := \{u \cdot v \mid u \in U, v \in V\}$$

der Produktformel

$$|U \cdot V| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|}.$$

**Aufgabe 48:** Zeige, in einer Gruppe der Ordnung 45 sind die Sylowgruppen Normalteiler, und folgere daraus, daß die Gruppe abelsch ist.

**Aufgabe 49:** Es sei $L = \mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(t^3 - 3t + 1)$.

(a) Berechne die Nullstellen von $f$ mit der Formel von Cardano und zeige, daß alle Nullstellen reell sind.

(b) Finde einen Erweiterungskörper $M$ von $L$, so daß $M/\mathbb{Q}$ eine Radikalerweiterung ist.

(c) Zeige, $L/\mathbb{Q}$ ist galoissch und $|\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 3$.

(d) Zeige, $L/\mathbb{Q}$ ist keine Radikalerweiterung.

**Aufgabe 50:** Zeige, ist $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ der achte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ und $L = \mathrm{ZFK}_K(t^8 - 2)$ der Zerfällungskörper von $t^8 - 2$ über $K$, dann gilt $\operatorname{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}_4$.