Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2021, Blatt 3

Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 06.05.2021, 10:00

Aufgabe 4: Berechne eine Primfaktorzerlegung der folgenden Polynome:

(a) $f = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.

(b) $f = t^4 + \overline{3}t^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[t]$.

Aufgabe 5: Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $f \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom, so daß die Reduktion $\overline{f}$ modulo p irreduzibel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[t]$ ist. Zeige, dann ist das Ideal $\mathfrak{m} = \langle p, f \rangle$ in $\mathbb{Z}[t]$ ein maximales Ideal.

Präsenzaufgabe 6: Zeige für $m \geq 1$ die folgenden Aussagen:

(a) Die Binomialkoeffizienten $\binom{2^m}{k}$ sind für $k = 1, \ldots, 2^m - 1$ durch 2 teilbar.

(b) Das Polynom $f = t^{2^m} + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[t]$.

Hinweis: in Teil (a) betrachte man das Polynom $(x+y)^{2^m}$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y]$, und in Teil (b) nutze man Teil (a).

Präsenzaufgabe 7: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist.

(a) Zeige, daß für ein echtes Ideal $P \lhd R$ die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

  (1) Für $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in P$ gilt schon $a \in P$ oder $b \in P$.

  (2) R/P ist ein Integritätsbereich.

  Ein solches Ideal P heißt auch ein *Primideal* in R.

(b) Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zorn, daß R ein minimales Primideal enthält, d.h. ein Primideal P, so daß es kein Primideal Q mit $Q \subsetneqq P$ gibt.