Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2021, Blatt 4

Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 13.05.2021, 10:00

Aufgabe 6: Sei K ein Körper und $f \in K[t] \setminus K$ habe die Primfaktorzerlegung

$$f = c \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

mit paarweise nicht assoziierten irreduziblen Polynomen p_i und mit $c \in K$.
Zeige, die maximalen Ideale in $K[t]/\langle f \rangle$ sind genau die Ideale $\langle \overline{p_i} \rangle$, $i = 1, \ldots, k$.

Aufgabe 7: Zeige, daß $f = t^3 + 3t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel ist und stelle für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$ die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{1+\alpha}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ dar.

Aufgabe 8: Zeige, eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Ring R mit $K \leq R \leq L$ schon ein Körper ist.

Präsenzaufgabe 8: Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K mit $|K(\alpha) : K| = n$.

(a) Zeige, die Abbildung

$$f : L \longrightarrow L : x \mapsto \alpha \cdot x$$

ist K-linear und $K(\alpha)$ ist ein f-invarianter Unterraum von L.

(b) Zeige, $f_{|K(\alpha)}$ hat bezüglich der Basis $B = (1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$ von $K(\alpha)$ die Matrixdarstellung

$$M_B^B(f_{|K(\alpha)}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

wenn $\mu_\alpha = t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_0$ das Minimalpolynom von α über K ist.

(c) Zeige, μ_α ist das charakteristische Polynom und zugleich das Minimalpolynom von $f_{|K(\alpha)}$ im Sinne der linearen Algebra, d.h.

$$\chi_{f_{|K(\alpha)}} = \det(t \cdot \mathrm{id}_{K(\alpha)} - f_{|K(\alpha)}) = \mu_{f_{|K(\alpha)}} = \mu_\alpha$$

(d) Zeige, μ_α ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_f = \det(t \cdot \mathrm{id}_L - f) \in K[t]$ von f in $K[t]$.