

Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 10.06.2021, 10:00

Aufgabe 14: Es sei K ein Körper mit $|K| = q = p^k$ Elementen, $p = \text{char}(K)$, und $n \in \mathbb{N}$ sei teilerfremd zu q . Ferner sei $m = \text{ord}(\bar{q})$ die Ordnung von $\bar{q} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ von \bar{q} als Element der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

(a) Zeige, der Zerfällungskörper $\text{ZFK}_K(t^n - 1)$ ist im Zerfällungskörper $\text{ZFK}_K(t^{q^m} - t)$ enthalten und

$$|\text{ZFK}_K(t^{q^m} - t)| = q^m.$$

(b) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\text{ZFK}_{\mathbb{F}_2}(t^7 - 1)$ über \mathbb{F}_2 .

Aufgabe 15: Sei K ein Körper und $f \in K[t] \setminus K$ ein nicht-konstantes Polynom.

(a) Zeige, genau dann hat f im algebraischen Abschluß \bar{K} von K eine mehrfache Nullstelle, wenn f und seine formale Ableitung f' in $K[t]$ nicht teilerfremd sind.

(b) Sind f und f' teilerfremd in $K[t]$, so hat f keinen mehrfachen Primteiler in seiner Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 16: Zeige, daß die folgenden Aussagen für einen Körper K äquivalent sind:

(a) K ist algebraisch abgeschlossen.

(b) Es gibt einen Teilkörper $N \leq K$ von K , so daß K/N algebraisch ist und jedes Polynom in $N[t] \setminus N$ zerfällt über K .

(c) Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung, so ist $L = K$.

Präsenzaufgabe 12: Überprüfe, ob die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ mit $\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ normal ist und bestimme den Grad der Körpererweiterung.