Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2021, Blatt 9

Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 24.06.2021, 10:00

Aufgabe 20: Es sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

(a) Zeige, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ galoisch ist.

(b) Zeige, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(c) Bestimme alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.

Hinweis: in c. darf man ohne Beweis verwenden, daß $\zeta + \zeta^4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt. Findet jemand heraus, weshalb?

Aufgabe 21: Es sei K ein Körper und $L = \mathrm{ZFK}_K(f)$ der Zerfällungskörper eines irreduziblen, separablen Polynoms $f = t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0 \in K[t]$ vom Grad drei.

(a) Zeige, ist $f = (t - \alpha_1) \cdot (t - \alpha_2) \cdot (t - \alpha_3)$ eine Faktorisierung von f über dem Zerfällungskörper L, dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta(f) :=& a_1^2 \cdot a_2^2 - 4 \cdot a_1^3 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2^3 + 18 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 - 27 \cdot a_0^2 \\ \overset{!}{=}& (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \in K.\end{aligned}$$

Man nennt $\Delta(f)$ die *Diskriminante* von f.

(b) Zeige, ist $\Delta(f) \in \{q^2 \mid q \in K\}$ eine Quadratzahl in K, so gilt $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{A}_3$.

(c) Zeige, ist $\Delta(f) \notin \{q^2 \mid q \in K\}$ keine Quadratzahl in K, so gilt $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{S}_3$.

(d) Bestimme die Galoisgruppe von $f = t^3 - 3t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$.

Präsenzaufgabe 14: Es sei L/K eine galoissche Körpererweiterung und es gebe ein $\alpha \in L$, so daß $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\mathrm{id}_L \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige, dann ist $L = K(\alpha)$.