Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2021, Blatt 11
Thomas Markwig

Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 08.07.2021, 10:00

Aufgabe 25: Die eulersche φ-Funktion

$$\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto |\mathbb{Z}_n^*|$$

ordnet einer positiven ganzen Zahl n die Anzahl der Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_n$ zu.

(a) Zeige, wenn $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ teilerfremd sind, dann gilt $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

(b) Zeige, ist $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, dann gilt $\varphi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p-1)$.

(c) Zeige, mit der Notation aus Satz 1.4 gilt

$$\varphi(n) = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|n}} \left(p^{n_p(n)} - p^{n_p(n)-1}\right) = n \cdot \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Hinweis: in Teil (a) darf man den Chinesischen Restsatz anwenden.

Aufgabe 26:

(a) Bestimme den Zwischenkörperverband von $\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}$ mit $\zeta_{25} = e^{\frac{2\pi i}{25}}$ wie in Beispiel 13.17, d.h. es müssen keine Erzeuger für die Zwischenkörper ausgerechnet werden.

(b) Überprüfe, ob $\sqrt[4]{5}$ in $\mathbb{Q}(\zeta_{25})$ enthalten ist.

Aufgabe 27: Bestimme eine Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Präsenzaufgabe 16: Zeige, $\sqrt[3]{2} + \zeta$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist ein primitives Element des Zerfällungskörpers $\mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(t^3 - 2)$ über $\mathbb{Q}$.

Hinweis: man kann Präsenzaufgabe 14 verwenden.