

Analysis 1

Abgabetermin: Dienstag, 02.05.2017, 10:00

Aufgabe 9: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x - 2.$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto 3x - 2.$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 5x + 3y.$

Aufgabe 10: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$

(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2).$

Finde zudem Beispiele, bei denen in (b) und (c) die Inklusionen echt sind.

Aufgabe 11: Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:

f ist genau dann injektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : X \rightarrow M$ und $h : X \rightarrow M$ mit $f \circ g = f \circ h$ folgt, dass $g = h$ ist.

Aufgabe 12: Beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2.$

(b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}.$