Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2017, Blatt 4

Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 08.05.2017, 12:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13:

(a) Zeige, dass $5^n + 7$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist.

(b) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cdot k^2 = \binom{n+1}{2}.$$

Aufgabe 14: Sei M eine Menge und betrachte folgende beide Mengen von Abbildungen:

$$A := \{f \mid f : \{0,1\} \to M \text{ Abbildung}\} \text{ und } B := \{g \mid g : M \to \{0,1\} \text{ Abbildung}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.

(b) B ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(c) Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.

(d) Ist M abzählbar unendlich, so ist B überabzählbar.

Aufgabe 15: Seien $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0\}$. Wir definieren

$$(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; a \cdot v_1 = w_1 \;\wedge\; a \cdot v_2 = w_2$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und zeichne die Äquivalenzklassen zu $(1,1)$ und $(-2,3)$ in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein.

Aufgabe 16: Ist $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive ganze Zahl, so definieren wir für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \text{ ist ein Vielfaches von } n.$$

Zeige, daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist mit genau den n paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.