Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2017, Blatt 5
Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 15.05.2017, 12:00

Aufgabe 17: Zeige durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k} = 2^{n-1}\cdot(n+2)$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 18:

(a) Zeige, dass durch

$$R := \big\{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\big|\; x \text{ teilt } y\big\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird. Ist R eine Totalordnung?

(b) Sei K ein Körper und $x \in K$. Zeige, dass $x^2 = 1$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 19: Sei $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und seien $(p,q),(p',q') \in M$. Wir definieren

$$(p,q) \sim (p',q') \quad :\Longleftrightarrow \quad p + q' = p' + q.$$

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(b) Zeige, dass durch

$$\overline{(p,q)} + \overline{(p',q')} := \overline{(p+p', q+q')}$$

auf $M/\sim$ eine wohldefinierte Operation $+$ definiert wird.
Zeige weiter, dass $(M/\sim, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 20: Beweise, dass $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$$

und

$$(a,b)\cdot(a',b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ein Körper ist.