Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 22.05.2017, 12:00

Aufgabe 21: Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Ist $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $0 < x^n$.

(b) Ist $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so gilt $(x < y \iff x^n < y^n)$.

Aufgabe 22: Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Aufgabe 23: Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so dass $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
Beweise, dass auch $\sup(A + B)$ existiert und $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 24:

(a) Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

$$\text{(i)}\;\; z = 2i - 3 \qquad \text{(ii)}\;\; z = \frac{5-i}{5+2i} \qquad \text{(iii)}\;\; z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^4}$$

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen:

$$\text{(i)}\;\; |z| \cdot |w| = |z \cdot w| \qquad \text{(ii)}\;\; z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{(iii)}\;\; \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \leq |z|$$