Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2017, Blatt 7
Thomas Markwig | Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 29.05.2017, 12:00

Aufgabe 25: Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3n^4+2n^2}{2n^5+4n^3+8}$.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{5n^4+2n^2}{2n^3+3} - \frac{10n+1}{4}$.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 \in [1,3)$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \;\text{ und }\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a)\right)$$

Aufgabe 27: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 28: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Zeige: existiert eine Zahl $c \in (0,1)$ mit

$$a_{n+1} \leq c \cdot a_n + b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.